BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№1 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2010

RİYAZİYYAT

ЗАДАЧА ТОЧНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Г.Ф.КУЛИЕВ, К.Ш.ДЖАББАРОВА

Бакинский Государственный Университет

e-mail: hamlet quliyev @ yahoo.com

В работе рассматривается задача точной управляемости в процессах, описываемых линейным гиперболическим уравнением второго порядка с граничным управлением. Применяя метод единственности Гильберта, вводится вспомогательная краевая задача и при помощи этой задачи показывается, что после некоторого порогого момента времени рассматриваемая система управляема.

1.Постановка задачи

Пусть $\Omega\subset R^n$ - ограниченная область с гладкой границей Γ, $x=(x_1,...,x_n)$ - произвольная точка области Ω, $T>0$ - заданное число, $0\le t\le T, Q=\Omega\times(0,T)$ - цилиндр, $S=\Gamma\times(0,T)$ - боковая поверхность цилиндра Q.

Пусть некоторый процесс описывается начально-краевой задачей в Q для гиперболического уравнения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)=f(x,t),\ (x,t)\in Q, \tag{1}$$

$$u|_S=v(x,t),\quad (x,t)\in S, \tag{2}$$

$$u|_{t=0}=u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=u_1(x),\ x\in\Omega. \tag{3}$$

Задача точной управляемости для (1)-(3) формулируется следующим образом:

Для заданного T найти такое гильбертово пространство H, что для каждой начальной пары $\{u_0,u_1\}\in H$ существует управление $v\in L^2(S)$, такое что для решения задачи (1)-(3) выполняются условия стабилизации:

$$u|_{t=T}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=T}=0\cdot \tag{4}$$

2. Обозначения и некоторые предположения

$R^n - n$-мерное евклидово пространство. Пусть $x^0 \in R^n$, $m(x) = x - x^0 = (x_1 - x_1^0, \ldots, x_n - x_n^0)$, $m_k(x) = x_k - x_k^0$. $R(x^0)$ - радиус наименьшего шара с центром в x^0, содержащего Ω. Через $\nu(x)$ обозначим единичную внешнюю нормаль к Γ. Обозначим $\Gamma(x^0) = \{x \in \Gamma | (m(x), \nu(x)) > 0\}$, $\Gamma_*(x^0) = \{x \in \Gamma | (m(x), \nu(x)) \le 0\}$, где $(m(x), \nu(x))$ - скалярное произведение в R^n, $S(x^0) = \Gamma(x^0) \times (0,T)$, $S_*(x^0) = \Gamma_*(x^0) \times (0,T)$, $S = S(x^0) \cup S_*(x^0)$.

Пусть

$$A(t)\varphi \equiv -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x,t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right).$$

Предположим, что для всех $(x,t) \in Q$ $a_{ij}(x,t) = a_{ji}(x,t)$ и для всех $\xi \in R^n$, $(x,t) \in Q$ $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \ge \alpha \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, $\alpha = const > 0$ и $a_{ij} \in C^1(\overline{Q})$, $i,j = 1,\ldots,n$.

Пусть существует такое число δ, $0 < \delta < 1$, что для всех $\xi \in R^n, (x,t) \in Q$

$$(1-\delta)\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} a_{ij}(x,t) m_k \xi_i \xi_j \ge 0 \text{ (см.[1])}.$$

Пусть $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in L^2(\Omega)$, $u_1 \in H^{-1}(\Omega)$. Обозначения, используемые в работе функциональных пространств заимствованы из [2].

Через $a(t;\Phi,\Psi)$ обозначим следующую билинейную форму:

$$a(t;\Phi,\Psi) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx .$$

Положим

$$\beta(t) \equiv \max_{1 \le i,j \le n} \left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial t} \right\|_{C(\overline{\Omega})}, \ T_0 = \frac{R(x^0)}{\delta} C_\alpha C_1^2, \ C_\alpha = \max\left\{ 1, \frac{1}{\alpha} \right\}, \ C_1 = \exp\left\{ \frac{n}{\alpha} \int_0^T \beta(t)dt \right\}.$$

Ниже покажем, что при $T > T_0$ система управляема, поэтому T_0 называется пороговым моментом времени.

Под решением задачи (1)-(3), при заданном управлении $v \in L^2(S)$, будем понимать функцию $u = u(x,t)$ из $L^2(Q)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_Q u\left[\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + A(t)g \right] dxdt = \int_Q fg dxdt - \int_S v \frac{\partial g}{\partial \nu_A} ds + \langle u_1(x), g(x,0) \rangle - \int_\Omega u_0(x) \frac{\partial g(x,0)}{\partial t} dx,$$

$$\forall g \in C^2(\overline{Q}), g(x,T) = \frac{\partial g(x,T)}{\partial t} = 0, g|_S = 0,$$

где $\left\langle \frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t}, \varphi_0(x) \right\rangle$ означает отношение двойственности между $H^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а $\frac{\partial g}{\partial \nu_A}$ - конормальная производная по отношению к оператору A.

Задача (1)-(3) обладает единственным слабым решением $u(x,t)$, определенным с помощью транспонирования (см.[3]). Отметим, что такое решение обладает следующими свойствами:

$$u \in C([0,T]; L^2(\Omega)),\ \frac{\partial u}{\partial t} \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \text{ (см.[4])}.$$

3. Основной результат

Теорема. Пусть $T > T_0$. Тогда для каждой пары $\{u_0, u_1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ существует управление $v \in L^2(S)$, такое, что решение задачи (1)-(3) удовлетворяет условиям (4).

Доказательство. Для доказательства теоремы применим метод единственности Гильберта [5]. Пусть $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ и рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} + A(t)\varphi = 0 \text{ в } Q, \tag{5}$$

$$\varphi\big|_S = 0, \tag{6}$$

$$\varphi\big|_{t=0} = \varphi_0(x),\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi_1(x) \text{ в } \Omega. \tag{7}$$

Тогда для единственного решения задачи (5)-(7) выполняется условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(S) \text{ (см.[4],[6])}.$$

Рассмотрим следующую задачу

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + A(t)\psi = f \text{ в } Q, \tag{8}$$

$$\psi = \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} & на \quad S(x^0), \\ 0 & на \quad S_*(x^0), \end{cases} \tag{9}$$

$$\psi\big|_{t=T} = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t}\bigg|_{t=T} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{10}$$

Задача (8)-(10) тоже обладает единственным слабым решением $\psi(x,t)$ определенным с помощью транспонирования (см.[3]) и, причем

$$\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega)),\ \frac{\partial\psi}{\partial t} \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \text{ (см.[4])}. \tag{11}$$

Для $\varphi_0 \in H_0^1(\Omega)$, $\varphi_1 \in L^2(\Omega)$ решаем задачу(5)-(7) и получаем, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(S)$. Далее решаем задачу (8)-(10) и получаем, что справедливо (11). Поэтому определяется отображение

$$\Lambda : H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

заданное равенством

$$\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\} = \left\{\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t}, -\psi(x,0)\right\}. \tag{12}$$

Сглаживая все данные задач (5)-(7) и (8)-(10), получаем, что решения сглаженных задач принадлежат, по крайней мере, пространству $H^2(Q)$. Далее, умножая обе части сглаженного уравнения (5) на $\psi(x,t)$ - решению сглаженной задачи (8)-(10), интегрируя по области Q, учитывая краевые условия (6),(7),(9),(10) и потом, переходя к пределу по параметру сглаживания, получим

$$\langle\frac{\partial\psi(x,0)}{\partial t},\varphi_0(x)\rangle - \int_\Omega \psi(x,0)\varphi_1(x)dx = \int_{S(x^0)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_i\nu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 ds -$$

$$-\int_Q f(x,t)\varphi(x,t)dxdt. \tag{13}$$

Из (12) и (13) следует

$$\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle = \int_{S(x^0)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_i\nu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 ds - \int_Q f\varphi dxdt, \tag{14}$$

где $\langle\Lambda\{\varphi_0,\varphi_1\},\{\varphi_0,\varphi_1\}\rangle$ означает отношение двойственности между $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

В $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F^2 = \int_{S(x^0)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_i\nu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 ds.$$

С помощью результатов работы [7] можно доказать, что существуют постоянные $M_1, M_2 > 0$, такие, что для всех $\{\varphi_0,\varphi_1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$

$$(T-T_0)M_1\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \le \int_{S(x^0)}\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\nu_i\nu_j\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)^2 ds \le M_2\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{15}$$

Неравенства (15) показывают, что при $T > T_0$ норма $\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|_F$ эквивалентна (см.[8]) норме в $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, заданной равенством

$$\|\{\varphi_0,\varphi_1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \int_\Omega\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial\varphi_0(x)}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega(\varphi_1(x))^2 dx.$$

Тогда для $T > T_0$ неравенства (15) показывают, что $F = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Отметим, что сопряженное пространство к F является $F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$, а оператор Λ является непрерывным по норме $\|\cdot\|_F$.

Из (5)-(7) следует, что существует $M_3 > 0$, такое, что

$$\|\varphi\|_X \le M_3 \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right), \qquad (16)$$

где

$$X = \left\{ \varphi \mid \varphi \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right), \ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \right\} \text{ (см.[3],[4]).}$$

Поскольку

$$\left| \int_Q f\varphi dxdt \right| \le \|f\|_{L^2(Q)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(Q)},$$

то, в силу (16) следует, что существует $M_4 > 0$, такое, что

$$-\int_Q f\varphi dxdt \ge -\|f\|_{L^2(Q)} \cdot \|\varphi\|_{L^2(Q)} \ge -M_4 \left(\|\varphi_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|\varphi_1\|_{L^2(\Omega)} \right). \quad (17)$$

Тогда из (14),(15) и (17) следует, что оператор $\Lambda : F \to F'$ является коэрцитивным, поэтому он является изоморфизмом между F и его сопряженным F'. А это показывает, что для заданной пары $\{u_1(x), -u_0(x)\} \in F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ существует единственная пара $\{\varphi_0, \varphi_1\} \in F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, такая, что

$$\Lambda\{\varphi_0, \varphi_1\} = \{u_1(x), -u_0(x)\}. \qquad (18)$$

Тогда (12) и (18) показывают, что решение $\psi(x,t)$ задачи (8)-(10) удовлетворяет условиям

$$\psi(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial \psi(x,0)}{\partial t} = u_1(x).$$

Таким образом, единственное решение $\psi(x,t)$ задачи (8)-(10) с управлением

$$v = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{на } \ S(x^0), \\ 0 & \text{на } \ S_*(x^0) \end{cases}$$

совпадает с решением $u(x,t)$ задачи (1)-(3). А это показывает, что $u(x,t)$ удовлетворяет условиям стабилизации (4). Теорема доказана.

Замечание. В данной работе устранены неточности, имеющиеся в работе [7], а именно, на странице 478 этой работы в формуле (5) для значения постоянного T_0 множитель 2 – лишний, значение постоянного C_1 не показано, а в формуле (10) на странице 479 вместо

$$\psi = \begin{cases} a_{ij}\nu_i\nu_j \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{на } \ S(x^0), \\ 0 & \text{на } \ S_*(x^0) \end{cases}$$

должно быть

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{на} \quad S(x^0), \\ 0 & \text{на} \quad S_*(x^0). \end{cases}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Komornik V. Exact controllability in short time for the wave equation // Ann.Inst. Henri Poincare, №6(2), 1989, p.153-164.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972, 415 с.
3. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 372 с.
4. Lasiecka I., Lions J.-L. and Triggiani R. Non homogeneous boundary value problems for second order hyperbolic operators // J. Math. pures et appl., 1986, №65, p.149-192.
5. Lions J.-L. Exact Controllability - Stabilization and Perturbations for distributed systems // J. Von Neumann Lecture, Boston 1986, SIAM Review, March 1988, p.1-68.
6. Лионс Ж.-Л. Управление сингулярными распределенными системами. М.: Наука, 1987, 368 с.
7. Apolaya R.F. Exact controllability for temporally wave equation // Portugalial Matematica, v. 51, Fasc. 4-1994, p.475-488.
8. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983, 424 с.

İKİTƏRTİBLİ XƏTTİ HİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN DƏQİQ İDARƏOLUNMA MƏSƏLƏSİ

H.F.QULİYEV, K.Ş.CABBAROVA

XÜLASƏ

İşdə ikitərtibli xətti hiperbolik tənliklə təsvir olunan sərhəd idarəli proseslərdə dəqiq idarəolunma məsələsinə baxılır. Hilbertin yeganəlik üsulunu tətbiq edərək köməkçi sərhəd məsələsi daxil edilir və bu məsələnin həllinin köməyilə göstərilir ki, zamanın müəyyən anından sonra baxılan sistem idarəolunandır.

THE PROBLEM OF EXACT CONTROLLABILITY FOR THE SECOND ORDER LINEAR HYPERBOLIC EQUATION

H.F.GULIYEV, K.Sh.JABBAROVA

SUMMARY

In the paper the problem of exact controllability is considered in the processes described by the second order linear hyperbolic equation with boundary control. Using Hilbert's uniqueness method the intermediate boundary problem is introduced. With the help of the solution of this problem it is shown that the considered system is controllable after certain time moment.